

Kurven- diskussion *Schritt für Schritt*

Zwei vollständige Aufgaben mit ausführlich kommentierter Musterlösung. Die erste Aufgabe führt Dich strukturiert durch jeden Teilschritt — die zweite vertieft das Gelernte in kompakter Form.

HEUTE AUF DEM TISCH

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

AUFGABE 1 — VOLLSTÄNDIGE KURVENDISKUSSION

Eine Funktion *komplett analysieren*

Im Folgenden untersuchst Du eine ganzrationale Funktion 3. Grades systematisch. Halte Dich an die acht Stationen — sie sind in dieser Reihenfolge nicht zufällig: Jede Station baut auf den Ergebnissen der vorherigen auf.

AUFGABENSTELLUNG

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

Führe für die Funktion f eine vollständige Kurvendiskussion durch und fertige eine Skizze des Graphen an. Gib alle besonderen Punkte mit Koordinaten an.

WEGWEISER — DIE ACHT STATIONEN

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| 1. Definitionsbereich bestimmen | 5. Ableitungen bilden |
| 2. Symmetrie prüfen | 6. Extrempunkte bestimmen |
| 3. Achsenschnittpunkte berechnen | 7. Wendepunkt bestimmen |
| 4. Verhalten im Unendlichen | 8. Skizze anfertigen |

LERTIPP Schreibe Dir vor jeder Station einen Halbsatz auf, was Du gerade berechnest und *warum*. Wer die Bedeutung eines Schrittes kennt, vergisst die Methode nicht.

→ **Musterlösung beginnt auf der nächsten Seite**

Musterlösung *im Detail*

Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

01 Definitionsbereich

f ist eine Polynomfunktion. Polynome sind für jede reelle Zahl definiert — es gibt weder Brüche mit x im Nenner, noch Wurzeln oder Logarithmen.

$$D_f = \mathbb{R}$$

02 Symmetrie

Wir prüfen, ob $f(-x) = f(x)$ (Achsensymmetrie zur y-Achse) oder $f(-x) = -f(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung) gilt.

$$\text{BERECHNUNG } f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 2(-x)^2 + 3(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$$

Das ist weder gleich $f(x)$ noch gleich $-f(x)$ — wegen des Mittelterms $-2x^2$, der bei der Punktsymmetrie das Vorzeichen wechseln müsste.

Keine Symmetrie

03 Achsenschnittpunkte

SCHNITTPUNKT MIT DER Y-ACHSE

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$$

Damit liegt der y-Achsenschnittpunkt bei $S_y(0 \mid 0)$.

NULLSTELLEN — SCHNITTPUNKTE MIT DER X-ACHSE

Wir suchen alle x mit $f(x) = 0$. Da jeder Summand den Faktor x enthält, klammern wir ihn aus:

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) = 0$$

Satz vom Nullprodukt: ein Produkt ist genau dann null, wenn ein Faktor null ist.

Erster Faktor: $x = 0$.

Zweiter Faktor: die quadratische Gleichung $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$ — wir multiplizieren mit 3, damit die pq-Formel sauber funktioniert:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Die zweite Lösung ist eine **doppelte Nullstelle** — der Graph berührt die x-Achse bei $x = 3$, ohne sie zu schneiden.

$N_1(0 \mid 0) \cdot N_2(3 \mid 0)$ doppelt

04 Verhalten im Unendlichen

Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet allein der höchste Term über das Grenzverhalten. Hier: $\frac{1}{3}x^3$ mit positivem Leitkoeffizienten und ungeradem Grad.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Von links unten nach rechts oben

05 Ableitungen

Wir bilden die ersten drei Ableitungen — sie werden für Extrema (f', f'') und den Wendepunkt (f'', f''') gebraucht.

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

$$f'''(x) = 2$$

ERINNERUNG Faktor herunterziehen, Exponent um 1 verkleinern. Konstanten verschwinden, weil ihre Ableitung 0 ist.

06 Extrempunkte

NOTWENDIGE BEDINGUNG — $F'(X) = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(16-12)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 1 \cdot x_2 = 3$$

HINREICHENDE BEDINGUNG — VORZEICHEN VON F''

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = +2 > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

Y-WERTE BERECHNEN

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 9 - 18 + 9 = 0$$

$$H(1 \mid \frac{4}{3}) \cdot T(3 \mid 0)$$

Beobachtung: Der Tiefpunkt liegt genau auf der x-Achse — er fällt mit der doppelten Nullstelle aus Schritt 3 zusammen. Das ist kein Zufall: Eine doppelte Nullstelle bedeutet, dass der Graph die Achse berührt, was nur an einem Extrempunkt möglich ist.

07 Wendepunkt

NOTWENDIGE BEDINGUNG — $F''(X) = 0$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

HINREICHENDE BEDINGUNG — $F'''(X) \neq 0$

$$f'''(2) = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Y-WERT BERECHNEN

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 8 + 6 = \frac{2}{3}$$

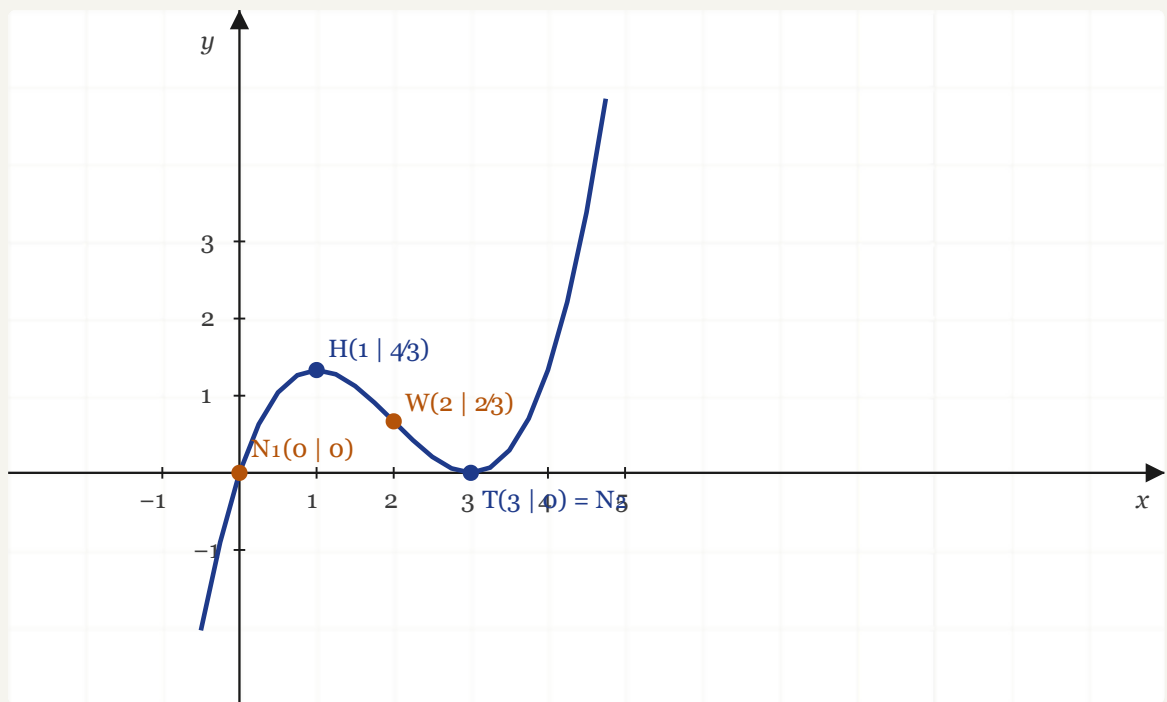
$$W(2 \mid \frac{2}{3})$$

Der Wendepunkt liegt — wie bei jeder Funktion 3. Grades — genau in der Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt: $x_W = (1+3) / 2 = 2$. ✓

08 Skizze des Graphen

Mit den ermittelten Punkten — Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkt sowie dem Verhalten im Unendlichen — können wir den Graphen sicher zeichnen. Eine kleine Wertetabelle hilft, die Form zwischen den markanten Punkten korrekt zu treffen.

GRAPH VON $F(X) = \frac{1}{3}X^3 - 2X^2 + 3X$



ZUSAMMENFASSUNG — ALLE ERGEBNISSE AUF EINEN BLICK

Definitionsbereich	$D_f = \mathbb{R}$
Symmetrie	keine
Nullstellen	$N_1(0 0) \cdot N_2(3 0)$ doppelt
y-Achsen-schnittpunkt	$S_y(0 0)$
Verhalten im Unendlichen	$x \rightarrow +\infty: f \rightarrow +\infty \cdot x \rightarrow -\infty: f \rightarrow -\infty$
Hochpunkt	$H(1 \frac{4}{3})$
Tiefpunkt	$T(3 0)$
Wendepunkt	$W(2 \frac{2}{3})$

AUFGABE 2 — VERTIEFUNG

Jetzt selbst anwenden

Gehe genauso vor wie in Aufgabe 1. Das Schema kennst Du nun — die Lösung ist bewusst kürzer gehalten, damit Du die Rechenwege erst selbst durchspielen kannst.

AUFGABENSTELLUNG

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

Untersuche g auf Definitionsbereich, Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte. Erstelle anschließend eine Skizze.

→ Musterlösung — kompakt

01 ·
DEFINITION

$$D_g = \mathbb{R} \text{ (Polynomfunktion)}$$

02 ·
SYMMETRIE

$$g(-x) = -(-x)^3 + 3(-x) = x^3 - 3x = -g(x) \rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

03 ·
ACHSEN

$$g(x) = 0 \rightarrow x(-x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Nullstellen: $N_1(-\sqrt{3} \mid 0)$, $N_2(0 \mid 0)$, $N_3(\sqrt{3} \mid 0)$. y-Schnittpunkt: $S_y(0 \mid 0)$.

04 ·
UNENDLICH

$$x \rightarrow +\infty: g \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty: g \rightarrow +\infty$$

Leitkoeffizient negativ, ungerader Grad — Spiegelung des Verhaltens aus Aufgabe 1.

05 ·
ABLEITUNGEN

$$g'(x) = -3x^2 + 3 \quad g''(x) = -6x \quad g'''(x) = -6$$

06 ·
EXTREMA

$$g'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$g''(1) = -6 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt} \quad g(1) = -1 + 3 = 2 \rightarrow \text{H}(1 \mid 2)$$

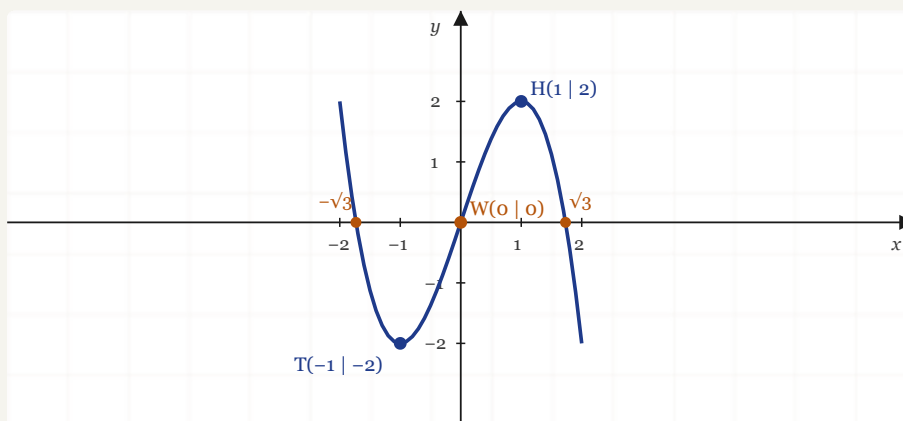
$$g''(-1) = +6 > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt} \quad g(-1) = 1 - 3 = -2 \rightarrow \text{T}(-1 \mid -2)$$

07 ·
WENDEPUNKT

$$g''(x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad g'''(0) = -6 \neq 0 \checkmark$$

$$g(0) = 0 \rightarrow \text{W}(0 \mid 0)$$

Der Wendepunkt liegt im Ursprung — konsistent mit der Punktsymmetrie aus Schritt 2.

GRAPH VON $G(X) = -X^3 + 3X$ 

→ Wertetabelle & Selbstkontrolle

Berechne die Funktionswerte zur Kontrolle. Wenn alle Werte stimmen, hast Du die Symmetrie und Form sicher erfasst.

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
G(x)	2	0	-2	0	2	0	-2
Bedeutung	—	N_1	T	$W = N_2$	H	N_3	—

↳ Vergleich mit Aufgabe 1

WAS DU AN DIESER AUFGABE LERNST

Symmetrie spart Arbeit. Weil g punktsymmetrisch zum Ursprung ist, sind Hoch- und Tiefpunkt gespiegelt: $H(1 \mid 2)$ und $T(-1 \mid -2)$. Du musst nur einen berechnen — der andere folgt automatisch.

Negativer Leitkoeffizient kippt das Verhalten. Im Vergleich zu Aufgabe 1 (Leitkoeffizient $+\frac{1}{3}$) läuft g spiegelverkehrt: links oben → rechts unten.

Wendepunkt = Symmetriezentrum. Bei punktsymmetrischen Funktionen liegt der Wendepunkt immer im Symmetriezentrum — hier im Ursprung. Diese Beobachtung ist eine perfekte Selbstkontrolle.

Drei Nullstellen. Im Gegensatz zu Aufgabe 1 (zwei Nullstellen, eine doppelt) hat g drei einfache Nullstellen — der Graph durchsticht die x-Achse jedes Mal, statt sie nur zu berühren.

⚠ Häufige Fehler — und wie Du sie vermeidest

FEHLER 01 — BEDINGUNGEN VERTAUSCHEN

Notwendig ist $f'(x) = 0$, hinreichend ist das Vorzeichen von f'' . Wer nur $f'(x) = 0$ löst und das Ergebnis als Hochpunkt deklariert, übersieht mögliche Sattelpunkte.

FEHLER 02 — Y-WERT VERGESSEN

Ein Extrempunkt hat zwei Koordinaten. $x = 1$ ist nur die halbe Antwort. Setze den x-Wert in f ein — nicht in f' — um den y-Wert zu bekommen.

FEHLER 03 — SYMMETRIE RATEN

"Sieht symmetrisch aus" reicht nicht. Rechne $f(-x)$ aus und vergleiche mit $f(x)$ bzw. $-f(x)$. Nur dann ist die Aussage belegt.

FEHLER 04 — WENDEPUNKT NUR ÜBER $f''=0$

Achtung: $f'(x) = 0$ ist nur notwendig. Du brauchst zusätzlich $f''(x) \neq 0$ (oder einen Vorzeichenwechsel von f''), sonst ist es kein Wendepunkt.

★ Bonus — jetzt selbst

ÜBUNGSAUFGABE OHNE LÖSUNG

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Führe für h selbstständig eine vollständige Kurvendiskussion durch. **Tipp:** Probiere bei der Nullstellensuche $x = -1$ aus — dann hilft Dir Polynomdivision weiter. Vergleiche Deine Ergebnisse anschließend mit dem Schema aus Aufgabe 1.