

Das Gauß-Verfahren

Drei unbekannte Zahlen finden — Schritt für Schritt, ohne Vorwissen. Mit komplett vorgerechneten Lösungen unter jeder Aufgabe.

0 ZUERST VERSTEHEN Worum geht es hier überhaupt?

Ein **lineares Gleichungssystem** (kurz: **LGS**) sind einfach mehrere Gleichungen, die **gleichzeitig** stimmen müssen. Gesucht sind drei unbekannte Zahlen. Wir geben ihnen Namen: **x**, **y** und **z**. Deine Aufgabe ist es, die **eine** Kombination aus x, y und z zu finden, die in **alle** Gleichungen gleichzeitig passt.

Stell dir ein Zahlenrätsel vor

Drei geheime Zahlen. Du bekommst drei Hinweise (= drei Gleichungen). Jeder Hinweis allein reicht nicht. Aber **zusammen** verraten die drei Hinweise die Zahlen ganz eindeutig. Das Gauß-Verfahren ist die Methode, mit der du sie sicher herausbekommst — ohne Raten.

Warum überhaupt ein „Verfahren“? Wenn du einfach drauflos probierst, wirst du verrückt. Das Gauß-Verfahren ist ein fester **Bauplan**, der **immer** funktioniert. Die Idee in einem Satz:

Wir formen die Gleichungen so um, dass eine **Treppe** entsteht — bis in der untersten Zeile nur noch **eine** Unbekannte steht. Die rechnest du sofort aus und arbeitest dich nach oben zurück.

1 DIE SPIELREGELN Was du mit den Zeilen machen darfst

Eine „Zeile“ ist eine Gleichung. Beim Umformen sind **genau drei** Dinge erlaubt — mehr brauchst du nie:

- **1. Mal- oder Geteilt-Rechnen:** Eine ganze Zeile mit einer Zahl (außer 0) malnehmen oder teilen. Wichtig: dann **jede** Zahl der Zeile, auch die hinter dem „=“.
- **2. Zeilen verrechnen:** Zwei Zeilen addieren oder voneinander abziehen. Das Ergebnis ersetzt eine der beiden Zeilen.
- **3. Zeilen tauschen:** Die Reihenfolge der Gleichungen ändern (z. B. die unterste nach oben holen).

*Diese drei Umformungen verändern die Lösung nicht — die geheimen Zahlen bleiben dieselben. Alles andere (z. B. nur die halbe Zeile malnehmen) ist **verboten** und macht alles kaputt.*

2

DER BAUPLAN

In 4 Schritten zur Lösung

- 1 **Schlüsselzeile nach oben.** Such eine Zeile, in der vor dem **x** eine **1** oder **-1** steht. Diese Zeile kommt nach ganz oben (Zeile I). Mit ihr rechnet es sich am leichtesten.
- 2 **Das x unten wegmachen.** Bring mit Hilfe von Zeile I das **x** in Zeile II und Zeile III zum Verschwinden — dort soll vor dem x am Ende eine **0** stehen.
- 3 **Das y wegmachen.** Jetzt nur noch mit den neuen Zeilen II und III arbeiten: mach das **y** in Zeile III weg. Damit ist die **Treppe (Stufenform)** fertig.
- 4 **Rückwärts einsetzen.** Unten steht nur noch **z** → ausrechnen. z in die mittlere Zeile einsetzen → **y**. Beide in die oberste Zeile → **x**. Fertig.

TIPPS So vermeidest du Fehler

- **Schreib ordentlich untereinander:** alle x in einer Spalte, alle y in einer, alle z in einer. So siehst du sofort, was 0 geworden ist.
- **Brüche vermeiden:** Wenn in Zeile II z. B. **3y** und in Zeile III **2y** steht, rechne „über Kreuz“: **2·(Zeile II) – 3·(Zeile III)**. Dann fällt das y glatt weg.
- **Hilfszahlen danebenschieben:** Notiere mit Bleistift, womit du gerade malnimmst (z. B. „| ·2“).

3

EINMAL GANZ LANGSAM

Musterbeispiel — jeder Schritt erklärt

Wir lösen dieses System. Lies es so: „ $1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 6$ “ usw. Eine 1 vor dem Buchstaben schreibt man nicht mit.

BEISPIEL Wie funktioniert Gauß?

I	x	$+ y$	$+ z =$	6
II	x	$+ 2y$	$+ 2z =$	11
III	$2x$	$+ y$	$+ 3z =$	13

1 SCHLÜSSELZEILE SUCHEN

Vor dem x in Zeile I steht eine 1 — perfekt. Zeile I bleibt oben. Nichts zu tauschen.

2 X IN ZEILE II UND III WEGMACHEN

Zeile II - Zeile I $\rightarrow (x-x) + (2y-y) + (2z-z) = 11-6$
ergibt neue Zeile IV: $y + z = 5$

Zeile III - 2·Zeile I $\rightarrow (2x-2x) + (y-2y) + (3z-2z) = 13-12$
ergibt neue Zeile V: $-y + z = 1$

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x & + & y & + & z & = & 6 \\ \text{IV} & 0 & & y & + & z & = & 5 \\ \text{V} & 0 & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Das x ist in den unteren beiden Zeilen jetzt 0 — also weg.

3 Y WEGMACHEN $\rightarrow$ TREPPE FERTIG

Zeile V + Zeile IV $\rightarrow (-y+y) + (z+z) = 1+5$
ergibt Zeile VI: $2z = 6 \quad | :2 \rightarrow z = 3$

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x & + & y & + & z & = & 6 \\ \text{IV} & 0 & & y & + & z & = & 5 \\ \text{VI} & 0 & & 0 & & 2z & = & 6 \text{ Stufenform } \checkmark \end{array}$$

Sieh dir die Nullen links unten an — das ist die „Treppe“. In der letzten Zeile steht nur noch z .

4 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$z = 3$
in Zeile IV: $y + z = 5 \rightarrow y + 3 = 5 \rightarrow y = 2$
in Zeile I: $x + y + z = 6 \rightarrow x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x = 1$

Lösung: $x = 1, y = 2, z = 3 \rightarrow (1 | 2 | 3)$

Probe: I: $1+2+3=6 \checkmark$ II: $1+4+6=11 \checkmark$ III: $2+2+9=13 \checkmark$

PFLICHT Die Probe — immer machen!

Ein einziger Vorzeichenfehler zerstört die ganze Rechnung. Setz deine x, y, z am Ende in **alle drei ursprünglichen** Gleichungen ein. Nur wenn überall eine wahre Aussage herauskommt (z. B. $6 = 6$), ist die Lösung wirklich richtig.

4 JETZT DU — MIT LÖSUNG DARUNTER

Übungsaufgaben

Deck die Lösung mit einem Blatt Papier ab, rechne selbst, und vergleiche dann jeden Schritt. Reihenfolge: von leicht nach schwer.

ÜBUNG 1 Einsteiger

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x & + & y & + & z & = & 6 \\ \text{II} & 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ \text{III} & 3x & + & 2y & + & z & = & 10 \end{array}$$

1 SCHLÜSSELZEILE

Zeile I hat vorne eine 1 $\rightarrow$ bleibt oben.

2 X WEGMACHEN

$$\begin{array}{l} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \rightarrow (2x-2x)+(y-2y)+(-z-2z)=1-12 \rightarrow \text{IV: } -y - 3z = -11 \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \rightarrow (3x-3x)+(2y-3y)+(z-3z)=10-18 \rightarrow \text{V: } -y - 2z = -8 \end{array}$$

3 Y WEGMACHEN

$$\text{IV} - \text{V} \rightarrow (-y+y)+(-3z+2z)=-11+8 \rightarrow -z = -3 \rightarrow z = 3$$

4 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$$\begin{array}{l} z = 3 \text{ in V: } -y - 2 \cdot 3 = -8 \rightarrow -y = -2 \rightarrow y = 2 \\ \text{in I: } x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x = 1 \end{array}$$

Lösung: (1 | 2 | 3)

Probe: I: $1+2+3=6$ ✓ II: $2+2-3=1$ ✓ III: $3+4+3=10$ ✓

ÜBUNG 2 Achtung Vorzeichen

$$\text{I} \quad x - 2y + 3z = 7$$

$$\text{II} \quad 2x + y + z = 4$$

$$\text{III} \quad -3x + 2y - 2z = -10$$

1 SCHLÜSSELZEILE

Zeile I hat vorne eine 1 $\rightarrow$ bleibt oben.

2 X WEGMACHEN

$$\text{II} - 2 \cdot \text{I} \rightarrow y: 1 - 2 \cdot (-2) = 5, \quad z: 1 - 2 \cdot 3 = -5, \quad \text{rechts: } 4 - 14 = -10$$

$$5y - 5z = -10 \quad | :5 \rightarrow \text{IV: } y - z = -2$$

$$\text{III} + 3 \cdot \text{I} \rightarrow y: 2 + 3 \cdot (-2) = -4, \quad z: -2 + 3 \cdot 3 = 7, \quad \text{rechts: } -10 + 21 = 11$$

$$\text{V: } -4y + 7z = 11$$

Bei Zeile III steht vorne $-3x$. Damit das weggeht, rechnen wir $+3 \cdot \text{I}$ (Minus und Plus heben sich auf).

3 Y WEGMACHEN

$$\text{V} + 4 \cdot \text{IV} \rightarrow (-4y + 4y) + (7z - 4z) = 11 + 4 \cdot (-2) \rightarrow 3z = 3 \rightarrow z = 1$$

4 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$$z = 1 \quad \text{in IV: } y - 1 = -2 \rightarrow y = -1$$

$$\text{in I: } x - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 7 \rightarrow x + 2 + 3 = 7 \rightarrow x = 2$$

Lösung: (2 | -1 | 1)

Probe: I: $2 + 2 + 3 = 7$ ✓ II: $4 - 1 + 1 = 4$ ✓ III: $-6 - 2 - 2 = -10$ ✓

ÜBUNG 3 Erst clever sortieren

$$\text{I} \quad 2x + 3y - z = 5$$

$$\text{II} \quad x - y + 2z = 5$$

$$\text{III} \quad 3x + y + z = 8$$

1 SCHLÜSSELZEILE SUCHEN & TAUSCHEN

Keine Zeile hat oben eine 1? Doch — **Zeile II** ($x - y + 2z = 5$). Die tauschen wir nach ganz oben. Das spart Brüche.

$$\text{I*} \quad x - y + 2z = 5 \quad (\text{war II})$$

$$\text{II*} \quad 2x + 3y - z = 5 \quad (\text{war I})$$

$$\text{III} \quad 3x + y + z = 8$$

2 X WEGMACHEN

$$\text{II*} - 2 \cdot \text{I*} \rightarrow 5y - 5z = -5 \quad | :5 \rightarrow \text{IV: } y - z = -1$$

$$\text{III} - 3 \cdot \text{I*} \rightarrow 4y - 5z = -7 \rightarrow \text{V: } 4y - 5z = -7$$

3 Y WEGMACHEN

$$\text{V} - 4 \cdot \text{IV} \rightarrow (4y - 4y) + (-5z + 4z) = -7 - 4 \cdot (-1) \rightarrow -z = -3 \rightarrow z = 3$$

4 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$$z = 3 \quad \text{in IV: } y - 3 = -1 \rightarrow y = 2$$

$$\text{in I*}: x - 2 + 6 = 5 \rightarrow x = 1$$

Lösung: (1 | 2 | 3)

Probe: I: $2+6-3=5$ ✓ II: $1-2+6=5$ ✓ III: $3+2+3=8$ ✓

ÜBUNG 4 Textaufgabe: Das Zahlentrio

Drei Zahlen haben diese Eigenschaft:

- Alle drei addiert ergeben **6**.
- Die erste minus dem Doppelten der zweiten, plus der dritten, ergibt **0**.
- Das Doppelte der ersten plus das Dreifache der dritten ergibt **13**.

1 TEXT IN GLEICHUNGEN ÜBERSETZEN

$$\begin{array}{lcllcl} \text{I} & x & + y & + z & = & 6 \\ \text{II} & x & - 2y & + z & = & 0 \\ \text{III} & 2x & + 0y & + 3z & = & 13 \text{ (kein } y!) \end{array}$$

In der dritten Bedingung kommt die zweite Zahl gar nicht vor $\rightarrow$ dort steht $0 \cdot y$.

2 X WEGMACHEN

$$\begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \rightarrow (x-x) + (-2y-y) + (z-z) = 0-6 \rightarrow -3y = -6 \rightarrow y = 2 \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \rightarrow (2x-2x) + (0-2y) + (3z-2z) = 13-12 \rightarrow \text{V: } -2y + z = 1 \end{array}$$

Glück gehabt: Die erste Verrechnung liefert y sofort.

3 EINSETZEN & RÜCKWÄRTS

$$\begin{array}{l} y = 2 \text{ in V: } -2 \cdot 2 + z = 1 \rightarrow z = 5 \\ \text{in I: } x + 2 + 5 = 6 \rightarrow x = -1 \end{array}$$

Lösung: $x = -1$, $y = 2$, $z = 5$

Probe: I: $-1+2+5=6$ ✓ II: $-1-4+5=0$ ✓ III: $-2+15=13$ ✓

ÜBUNG 5 Schon halb fertig

Hier heißen die Unbekannten x_1, x_2, x_3 — das sind nur andere Namen für x, y, z .

$$\text{I} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{II} \quad 0 - 3x_2 - 2x_3 = -8$$

$$\text{III} \quad 0 + x_2 - x_3 = 1$$

1 SCHAUEN, WAS SCHON DA IST

x_1 kommt nur in Zeile I vor — unten ist es schon weg. Schritt 2 ist also bereits erledigt. Wir müssen nur noch x_2 in Zeile III wegmachen.

2 x_2 WEGMACHEN (TREPPE)

$$\text{II} + 3 \cdot \text{III} \rightarrow (-3x_2 + 3x_2) + (-2x_3 - 3x_3) = -8 + 3 \rightarrow -5x_3 = -5 \rightarrow x_3 = 1$$

Über Kreuz: Zeile III mal 3, damit aus $+x_2$ ein $+3x_2$ wird und sich mit $-3x_2$ aufhebt.

3 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$$x_3 = 1 \text{ in III: } x_2 - 1 = 1 \rightarrow x_2 = 2$$

$$\text{in I: } 2x_1 + 2 + 1 = 1 \rightarrow 2x_1 = -2 \rightarrow x_1 = -1$$

Lösung: $(-1 \mid 2 \mid 1)$

Probe: I: $-2+2+1=1$ ✓ II: $-6-2=-8$ ✓ III: $2-1=1$ ✓

ÜBUNG 6 Profi: negative Ergebnisse

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x_1 & + x_2 - x_3 = 4 \\ \text{II} & 0 & + x_2 - 3x_3 = 1 \\ \text{III} & -x_1 & - 2x_2 - x_3 = 5 \end{array}$$

1 SCHLÜSSELZEILE

Zeile I hat vorne eine 1 $\rightarrow$ bleibt oben. (x_1 in Zeile II ist schon 0.)

2 x_1 WEGMACHEN

$$\text{III} + \text{I} \rightarrow (-x_1 + x_1) + (-2x_2 + x_2) + (-x_3 - x_3) = 5 + 4 \rightarrow \text{IV: } -x_2 - 2x_3 = 9$$

3 x_2 WEGMACHEN

$$\text{IV} + \text{II} \rightarrow (-x_2 + x_2) + (-2x_3 - 3x_3) = 9 + 1 \rightarrow -5x_3 = 10 \rightarrow x_3 = -2$$

4 RÜCKWÄRTS EINSETZEN

$$\begin{array}{l} x_3 = -2 \text{ in II: } x_2 - 3 \cdot (-2) = 1 \rightarrow x_2 + 6 = 1 \rightarrow x_2 = -5 \\ \text{in I: } x_1 + (-5) - (-2) = 4 \rightarrow x_1 - 3 = 4 \rightarrow x_1 = 7 \end{array}$$

Lösung: (7 | -5 | -2)

Probe: I: $7 - 5 + 2 = 4$ ✓ II: $-5 + 6 = 1$ ✓ III: $-7 + 10 + 2 = 5$ ✓

5 DARAN SCHEITERN FAST ALLE Die 4 typischen Fehler

FEHLER 1 Vorzeichen-Dreher

Beim Abziehen wird aus $-2y$ ein $+2y$ — und das wird vergessen. Merke: „minus mal minus = plus“. Schreib das Zwischenergebnis lieber einmal mehr hin.

FEHLER 2 Nur die halbe Zeile

Du nimmst die Zeile mal 3, aber die Zahl **hinter dem** „=“ bleibt stehen. Regel: Was du mit der Zeile machst, machst du mit **jeder** Zahl der Zeile.

FEHLER 3 Falsche Zeile ersetzt

Das Ergebnis von „II – I“ landet aus Versehen in Zeile I statt in Zeile II. Schreib immer dazu, welche neue Zeile (IV, V, ...) gerade entsteht.

FEHLER 4 Probe weggelassen

Ohne Probe merkst du einen Rechenfehler nie. Sie kostet 30 Sekunden und rettet die ganze Aufgabe. **Immer** einsetzen.

1. **Zeile mit vorne 1** nach oben holen.
2. **x** in Zeile II & III auf 0 bringen (mit Vielfachen von Zeile I).
3. **y** in Zeile III auf 0 bringen → Treppe steht.
4. Unten **z** ausrechnen, dann **y**, dann **x** (rückwärts einsetzen).
5. **Probe:** x, y, z in alle 3 Originalgleichungen einsetzen.