

Exponentialfunktionen – ZAP Übungsblatt

MATHEMATIK · KLASSE 10

8 Aufgaben über alle Aufgabentypen · Tabellen · Graphen · Sachaufgaben · Lösungen ab Seite 2 ZAP-VORBEREITUNG NRW

SPICKZETTEL – ALLES, WAS DU BRAUCHST

GRUNDFORM

$$f(x) = a \cdot b^x \cdot a = \text{Anfangswert} \cdot b = \text{Wachstumsfaktor}$$

WACHSTUM / ZERFALL

$b > 1$ wächst · $0 < b < 1$ zerfällt

PROZENT → FAKTOR

$$b = 1 + p/100 \text{ (Wachstum)} \\ \cdot b = 1 - p/100 \text{ (Zerfall)}$$

FAKTOR AUS TABELLE

$$b = f(x+1) / f(x) \cdot \text{konstant} \\ \Rightarrow \text{exponentiell}$$

ZEITPUNKT LÖSEN

$$\text{aus } b^t = c \text{ folgt } t = \log(c) / \log(b)$$

VERDOPPLUNG / HALBIERUNG

$$t_V = \log 2 / \log b \cdot t_H = \log 0,5 / \log b$$

1 Funktion aus Wertetabelle

TABELLE

Eine Größe wird beobachtet. Es liegt folgende Wertetabelle vor:

x	0	1	2	3	4
f(x)	80	120	180	270	405

- Zeige, dass die Werte zu einer Exponentialfunktion gehören.
- Bestimme die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot b^x$.
- Berechne $f(7)$.

2 Wachstum aus Sachkontext

TEXTAUFGABE

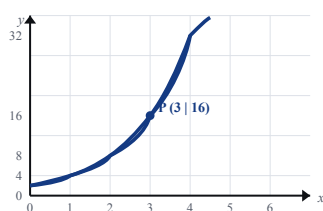
In einer Stadt leben aktuell 12.000 Einwohner. Die Bevölkerung wächst pro Jahr um **3,5 %**.

- Stelle die Funktionsgleichung $N(t)$ für den Bestand nach t Jahren auf.
- Wie viele Einwohner sind es nach 8 Jahren?
- Nach wie vielen Jahren überschreitet die Einwohnerzahl 18.000?

3 Funktion aus Graph

GRAPH

Der Graph der Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ ist abgebildet. Er verläuft durch den markierten Punkt P (3 | 16).



- Lies den Anfangswert a aus dem Graphen ab.
- Bestimme den Wachstumsfaktor b aus dem Punkt P.
- Gib die vollständige Funktionsgleichung an.

4 Exponentieller Zerfall

TEXTAUFGABE

Ein Medikament wird im Körper pro Stunde um **15 %** abgebaut. Anfangsdosis: **200 mg**.

- Stelle die Funktionsgleichung $m(t)$ für die verbleibende Wirkstoffmenge auf.
- Wie viel mg Wirkstoff sind nach 5 Stunden noch im Körper?
- Nach wie vielen Stunden sind noch genau 50 mg vorhanden?

5 Verdopplungs- & Halbwertszeit

TEXTAUFGABE

Eine Bakterienkultur startet mit 500 Bakterien und verdoppelt sich alle **3 Stunden**.

- Bestimme die Funktionsgleichung $N(t)$ mit der Zeit t in Stunden.
- Berechne den Bestand nach 12 Stunden.
- Wann sind erstmals mehr als 10.000 Bakterien vorhanden?

6 Zinseszins

ANWENDUNG

2.500 € werden zu einem Zinssatz von **3,2 % p.a.** angelegt.

- Welches Endkapital ergibt sich nach 8 Jahren?
- Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

7 Linear vs. Exponentiell – Vergleich

TABELLE · ARGUMENTIEREN

Zwei Pflanzen werden im Versuch beobachtet: $A(t) = 10 + 4 \cdot t$ (linear, in cm) und $B(t) = 10 \cdot 1,25^t$ (exponentiell, in cm). t in Wochen.

- Ergänze die Wertetabelle für $t = 0, 2, 5, 8, 12$.
- Begründe ohne Rechnung, dass B die Pflanze A langfristig überholt.
- Bestimme näherungsweise, ab welchem t gilt: $B(t) > A(t)$.

t (Wochen)	0	2	5	8	12
A(t) linear	10				
B(t) exponentiell	10				

8 Komplexe Sachaufgabe

ZAP-KLASSIKER

In einem See wurden 200 Karpfen ausgesetzt. Beobachtungen zeigen, dass die Population pro Jahr um **22 %** wächst.

- Gib die Funktionsgleichung $K(t)$ für die Anzahl der Karpfen nach t Jahren an.
- Berechne den Bestand nach 4 Jahren und runde sinnvoll.
- Ab welchem Jahr leben mehr als 1.000 Karpfen im See?
- Erkläre in einem Satz, warum das Modell langfristig nicht realistisch sein kann.

1 Funktion aus Wertetabelle

a. EXPONENTIELL PRÜFEN – QUOTIENT BENACHBARTER WERTE

$$120/80 = 1,5 \cdot 180/120 = 1,5 \cdot 270/180 = 1,5 \cdot 405/270 = 1,5$$

Konstanter Faktor 1,5 → exponentielles Wachstum.

$$b = 1,5$$

b. FUNKTIONSGLEICHUNG – A AUS F(0) ABLESEN

$$f(0) = 80 \Rightarrow a = 80$$

$$f(x) = 80 \cdot 1,5^x$$

c. F(7) – EINSETZEN

$$f(7) = 80 \cdot 1,5^7 = 80 \cdot 17,0859... \approx 1366,87$$

$$f(7) \approx 1366,9$$

2 Wachstum aus Sachkontext

a. PROZENT → WACHSTUMSFAKTOR

$$b = 1 + 3,5/100 = 1,035 \cdot a = 12000$$

$$N(t) = 12000 \cdot 1,035^t$$

b. BESTAND NACH 8 JAHREN

$$N(8) = 12000 \cdot 1,035^8 = 12000 \cdot 1,3168... \approx 15.801,9$$

$$\approx 15.802 \text{ Einwohner}$$

c. WANN N(T) > 18.000?

$$18000 = 12000 \cdot 1,035^t \Rightarrow 1,035^t = 1,5$$

$$t = \log(1,5) / \log(1,035) = 0,17609 / 0,01494 \approx 11,79$$

Im 12. Jahr wird die Marke überschritten.

3 Funktion aus Graph

a. ANFANGSWERT A AUS GRAPH

Der Graph schneidet die y-Achse bei y = 2. $a = 2$

b. WACHSTUMSFAKTOR B AUS P (3 | 16)

$$f(3) = 2 \cdot b^3 = 16 \Rightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$b = 2$$

c. FUNKTIONSGLEICHUNG

$$f(x) = 2 \cdot 2^x$$

4 Exponentieller Zerfall

a. ZERFALLSFAKTOR – MINUS, WEIL ABBAU

$$b = 1 - 15/100 = 0,85 \cdot a = 200$$

$$m(t) = 200 \cdot 0,85^t$$

b. WIRKSTOFF NACH 5 H

$$m(5) = 200 \cdot 0,85^5 = 200 \cdot 0,4437... \approx 88,73$$

$$\approx 88,7 \text{ mg}$$

c. WANN NUR NOCH 50 MG? – LOGARITHMUS

$$50 = 200 \cdot 0,85^t \Rightarrow 0,85^t = 0,25$$

$$t = \log(0,25) / \log(0,85) = -0,60206 / -0,07058 \approx 8,53$$

nach ca. 8,5 Stunden

5 Verdopplung & Halbwertszeit

a. VERDOPPLUNG IN 3 H → FAKTOR B

$$500 \cdot b^3 = 1000 \Rightarrow b^3 = 2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$$

$$N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$$

b. BESTAND NACH 12 H

$$N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8000$$

$$8.000 \text{ Bakterien}$$

c. WANN N(T) > 10.000?

$$2^{t/3} = 20 \Rightarrow t = 3 \cdot \log(20)/\log(2) \approx 12,97$$

nach ca. 13 Stunden

6 Zinseszins

a. ENDKAPITAL NACH 8 JAHREN

$$K(t) = 2500 \cdot 1,032^t$$

$$K(8) = 2500 \cdot 1,032^8 = 2500 \cdot 1,28701... \approx 3217,52$$

$$\approx 3.217,52 \text{ €}$$

b. VERDOPPLUNGSZEIT – $T_V = \log 2 / \log B$

$$t_V = \log(2) / \log(1,032) = 0,30103 / 0,01368 \approx 22,01$$

nach ca. 22 Jahren verdoppelt sich das Kapital

7 Linear vs. Exponentiell

a. WERTETABELLE AUSFÜLLEN

t (Wochen)	0	2	5	8	12
$A(t) = 10 + 4t$	10	18	30	42	58
$B(t) = 10 \cdot 1,25^t$	10	15,6	30,5	59,6	145,5

b. BEGRÜNDUNG OHNE RECHNUNG

Bei A wächst pro Woche immer derselbe Betrag (4 cm). Bei B wächst **der Zuwachs selbst**, weil sich der aktuelle Wert mit 1,25 multipliziert — der Zuwachs wird also jede Woche größer. Exponentielles Wachstum überholt jedes lineare Wachstum auf lange Sicht.

c. SCHNITTPUNKT — AUS TABELLE ABLESEN

Bei $t = 5$ sind A und B fast gleich ($A = 30$, $B \approx 30,5$). Ab dann liegt B dauerhaft über A.

B überholt A bei ca. $t = 5$ Wochen.

8 Komplexe Sachaufgabe — Karpfen

a. FUNKTIONSGLEICHUNG

$$b = 1 + 22/100 = 1,22 \quad a = 200$$

$$K(t) = 200 \cdot 1,22^t$$

b. BESTAND NACH 4 JAHREN

$$K(4) = 200 \cdot 1,22^4 = 200 \cdot 2,21534... \approx 443,07$$

ca. 443 Karpfen

c. WANN $K(t) > 1000$?

$$1000 = 200 \cdot 1,22^t \Rightarrow 1,22^t = 5$$

$$t = \log(5) / \log(1,22) = 0,69897 / 0,08636 \approx 8,09$$

Ab dem 9. Jahr leben mehr als 1.000 Karpfen im See.

d. MODELLKRITIK

Der See hat eine begrenzte Nahrungs- und Sauerstoffkapazität — der Bestand kann nicht ewig mit 22 % pro Jahr wachsen. Das Modell ist nur für die ersten Jahre realistisch.